Wichtige Informationen

(1) **Allgemein:**
Informationen zur Lehrveranstaltung *Lineare Algebra I* erhalten Sie über die begleitende Homepage: `http://www.math.uni-konstanz.de/algebra/2023_24_LinA1/`
Bei Fragen rund um die Vorlesung und den Übungsbetrieb stehen Ihnen zur Verfügung:
  (a) Sarah Hess, sarah.hess@uni-konstanz.de, Büro F408
  (b) Moritz Schick, moritz.schick@uni-konstanz.de, Büro F409

(2) **Übungsbetrieb:**
Überprüfen Sie, ob Sie einer Gruppe zugewiesen wurden und Sie den genannten Termin wahrnehmen können. Ist eines davon nicht der Fall, so melden Sie sich bitte unverzüglich bei Sarah Hess und / oder Moritz Schick. *Achtung*, ein eigenständiger Wechsel der Übungsgruppe ist **nicht** möglich.

(3) **Scheinkriterien:**
Die erfolgreiche Teilnahme an dem Übungsbetrieb ist obligatorisch für das Bestehen des Moduls *Lineare Algebra I*. Hierfür müssen Sie die folgenden Scheinkriterien erfüllen:
  (a) Regelmäßige Teilnahme an den Tutorien.
  (b) Mindestens einmal eine bearbeitete Aufgabe vorrechnen.
  (c) Teilnahme am Selbsteinschätzungstest.
  (d) Erreichen von mindestens 50% aller möglichen Punkte am Ende des Semesters.

(4) **Plenumsübung:**
In der *Plenumsübung* werden die Inhalte aus der Vorlesung nochmals wiederholt und anhand von Beispielen und Aufgaben vertieft. Die Teilnahme an der Plenumsübung ist freiwillig. Bei Fragen rund um die Vorlesung und die Plenumsübung steht Ihnen Sebastian Krapp (sebastian.krapp@uni-konstanz.de, Büro F410) zur Verfügung.

(5) **Mathewerkstatt:**
In der *Mathewerkstatt* können Sie gemeinsam mit anderen Studierenden die Übungsblätter zur Linearen Algebra und Analysis bearbeiten und haben dabei die Gelegenheit, Studierenden aus höheren Semestern und Promovierenden um Rat zu bitten. Die Teilnahme an der Mathewerkstatt ist freiwillig. Bei Fragen rund um die Mathewerkstatt steht Ihnen Anna von Pippich (anna.pippich@uni-konstanz.de, Büro G413) zur Verfügung. Die Homepage der Mathewerkstatt finden Sie unter folgendem Link:
`https://www.mathematik.uni-konstanz.de/pippich/lehre/mathewerkstatt/`

(6) **Einführung in das mathematische Arbeiten I:**
In der *Einführung in das mathematische Arbeiten I (EmA I)* wird sich auf systematischer Art und Weise mit verschiedenen Teilaspekten des mathematischen Arbeitens beschäftigt. Dabei werden Sie in den Veranstaltungen in der Regel viel selbst anhand von Beweismechanik-Aufgaben üben. Die Teilnahme an der Vorlesung EmA I ist freiwillig. Es ist jedoch empfehlenswert die EmA I zu besuchen bis einfache Übungsaufgaben erfolgreich selbstständig gelöst werden können, mindestens jedoch bis zum Selbsteinschätzungstest am 25.11.2023. Bei Teilnahmewunsch melden Sie sich bitte auf der entsprechenden ILIAS-Seite an. Dort finden Sie auch alle weiteren Informationen zur Veranstaltung. Bei Fragen rund um die EmA I steht Ihnen Anna von Pippich (anna.pippich@uni-konstanz.de, Büro G413) zur Verfügung.

(7) **Beweismechanik-Aufgaben:**
Alle zwei Wochen gibt es auf dem Übungsblatt zur *Linearen Algebra I* eine verpflichtende *Beweismechanik-Aufgabe (BMA)* mit Fokus auf dem vollständigen und sauberen Aufschreiben des Beweises. Ihre Lösung der BMA muss als Zweier-Team auf der ILIAS-Seite der Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten I* separat online unter *Abgabe Beweismechanik-Aufgaben – Vorlesung Lineare Algebra* abgegeben werden. Melden Sie sich dazu auf ILIAS für die Vorlesung EmA I an. Bei Fragen zur Korrektur oder Abgabe der BMA können Sie sich gerne per Mail an Heike Scheuermann (heike.scheuermann@uni-konstanz.de) wenden.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 1

Abgabe: Freitag, den 03. November 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und der Gruppennummer.

Aufgabe 1.1 *(1+1+2 Punkte)*

Sei X eine Menge und $A, B \subseteq X$ beliebig. Es bezeichne

$$\begin{aligned} A^C &:= \{x \in X \mid x \notin A\} \text{ das } \textit{Komplement} \text{ von } A, \\ A \cup B &:= \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \text{ die } \textit{Vereinigung} \text{ von } A \text{ und } B, \\ A \cap B &:= \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \text{ der } \textit{Schnitt} \text{ von } A \text{ und } B. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.
(b) Zeigen Sie $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
(c) Bestimmen Sie sämtliche $Y \subseteq X$, sodass $(A \cup Y)^C = A^C \cup Y^C$.

Aufgabe 1.2 *(1+1+1+1 Punkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das neutrale Element und die Inversen einer Gruppe eindeutig bestimmt sind. Bezeichne $(G, \cdot)$ hierfür eine Gruppe.

(a) Für $e_1, e_2 \in G$ gelte $e_1 \cdot x = x = e_2 \cdot x$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie $e_1 = e_2$.
(b) Für $e_1, e_2 \in G$ gelte $e_1 \cdot x = x = x \cdot e_2$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie $e_1 = e_2$.

Es bezeichne e nun das (eindeutige) neutrale Element der Gruppe $(G, \cdot)$.

(c) Für $a, b, c \in G$ gelte $a \cdot b = e = a \cdot c$. Zeigen Sie $b = c$.
(d) Für $a, b \in G$ gelte $a \cdot b = e$. Zeigen Sie $b \cdot a = e$.

Aufgabe 1.3 *(1+1+2 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende (unvollständige) Verknüpfungstafel einer abelschen Gruppe:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	4				3
1	0				
2					
3					
4					

(a) Zeigen Sie, dass in jeder Zeile und Spalte jede Zahl zwischen 0 und 4 genau einmal vorkommt.
(b) Vervollständigen Sie die Verknüpfungstafel.
(c) Entscheiden Sie, ob die Lösung in (b) eindeutig ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.4 *(2+2 Punkte)*

Prüfen Sie für die folgenden Strukturen, ob die (Gruppen-)Axiome der *Assoziativität, Existenz eines Neutralen Elements, Existenz von Inversen* und *Kommutativität* jeweils erfüllt sind. Beweisen Sie!

(a) $(F, +)$, wobei $F := \{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto f(r) + g(r)$ für $f, g \in F$. Gemäß Vorlesung gilt ferner $f = g$ genau dann, wenn $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
(b) $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \circ)$, wobei $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ und $a \circ b := a^b$ für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(4 Bonuspunkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}, +)$ mit der Relation $\leq$ eine *angeordnete* abelsche Gruppe bildet, wobei $a \leq b$ genau dann gilt, wenn $b - a \in \mathbb{N}_0$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.
Überprüfen Sie die folgenden vier Axiome einer *totalen Anordnung*:

(a) *Reflexivität*: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a \leq a$.
(b) *Antisymmetrie*: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ folgt aus $a \leq b$ und $b \leq a$ bereits $a = b$.
(c) *Transitivität*: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ folgt aus $a \leq b$ und $b \leq c$ bereits $a \leq c$.
(d) *Totalität*: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.

Prüfen Sie nun noch die Verträglichkeit der Gruppenoperation $+$ mit der Relation $\leq$. Seien hierfür $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ gegeben.

(e) Zeigen Sie $a + c \leq b + c$ für alle $c \in \mathbb{Z}$.
(f) Zeigen Sie $-b \leq -a$.